Grabs

9
1964

Rechenstab-Brief

Berichte und Anregungen für das Stabrechnen

Aus dem Inhalt

FABER-CASTELL

Verantwortliche Schriftleitung:

Dr. Peter Pirchan
Ing. Harald Bachmann

Hinweis:

Der Castell-Rechenstab-Brief wird kostenlos an Interessenten verschickt. Weitere Druckschriften können angefordert werden.

Ein Beitrag zur Rechenstab-Symbolik*)

von A. Zippel, Brunnen/Schweiz

In Anleitungen, Berichten und Anregungen für das Stabrechnen ist es oft bemühend, für einfache Einstellungen auf dem Rechenstab langatmige Erklärungen lesen zu müssen. So besteht denn sicher vielerseits der Wunsch, daß man sich auf eine einheitliche, kurze und prägnante Symbolik einigen möge, welche die einzelnen Schritte auch für einen Anfänger deutlich sichtbar macht.

In dieser Hinsicht scheint mir die von Ing. Rudolf Huber vorgeschlagene Symbolik (vgl. FABER-CASTELL Rechenstab-Briefe Nr. 5, 1962, S. 7 ff.) besonders wertvoll zu sein. Mit einigen Ergänzungszeichen, die vor allem dem Anfänger helfen wollen, habe ich damit bei meinen Schülern sehr gute Erfolge erzielt. Die einzelnen Zeichen — die sich übrigens auch mit einer gewöhnlichen Schreibmaschine gut tippen lassen — sind logisch aufgebaut und lassen sich deshalb sehr gut merken.

Beim Stabrechnen stehen sich immer zwei Werte auf zwei verschiedenen Skalen gegenüber. Dieses Zusammenfallen, resp. Übereinanderstehen eines Wertepaars (im folgenden stets als Koinzidenz bezeichnet), wird am einfachsten durch einen Schrägstrich (/) dargestellt, der je nachdem noch speziell gekennzeichnet werden kann: ein Strichlein oben bezieht sich auf die Zunge, eines unten auf den Läufer, während eines durch den Schrägstrich anzeigt, daß keine eigentliche Koinzidenz mehr vorhanden ist. Dabei können diese Ergänzungszeichen beliebig kombiniert werden.

*) Eine Symbolik für die Darstellung des Rechenganges beim Stabrechnen, bei welcher die Koinzidenz durch einen Vertikalstrich (oder auch Schrägstrich) dargestellt wird, wurde u. W. erstmalig von Prof. Dr. Karl Strubecker angewandt (siehe auch „Einführung in die höhere Mathematik" von Prof. Dr. Karl Strubecker, R. Oldenburg Verlag München, 1955).

Für das Beispiel im rechtwinkligen Dreieck:

a = 1,82; c = 2,88; b gesucht, sieht diese Symbolik folgendermaßen aus:

D 1,82 / C 1 // CI 2,88 / S 39,2^0; T 39,2^0 / CI 2,23 = b bzw.

D a / C 1 // CI c / S α ; T α / CI b

Ing. Rudolf Huber hat diese Symbolik entsprechend erweitert, indem für jede Koinzidenz eine besondere Zeile verwendet, das Zwischenergebnis mit s bezeichnet und bei einer evtl. notwendigen Zwischeneinstellung mit dem Läufer ein L vorangestellt wird. Ein Punkt vor der Zeile deutet an, daß eine weitere Schieberbewegung nicht erforderlich ist (siehe Rechenstabbrief Nr. 2, 1961, S. 2). Für das vorgenannte Beispiel erhält man dann folgende Symbolik:

D 1,82 / C 1	Da / C 1
. CI 2,88 / S 39,2^0 = s	. CI c / S s
L T 39,2^0 = s/$\underline{\text{CI}}$ 2,23	L Ts / $\underline{\text{CI}}$ b

Der in diesem Beitrag aufgezeigte Weg geht nun dahin, diese Symbolik noch weiter auszubauen. Hiernach wäre für das behandelte Beispiel folgende Schreibweise erforderlich:

D 1,82 7 C 1	D a 7 C 1
CI 2,88 ∠ S 39,2^0	CI c ∠ S α
T 39,2^0 ∠ $\underline{\text{CI}}$ 2,23	T α ∠ $\underline{\text{CI}}$ b

Obwohl allen drei Systemen das gleiche Grundprinzip zugrunde liegt, dürfte es interessant sein, zu diesem Beitrag die Meinungen geübter Stabrechner oder Lehrer, die sich besonders mit dem Stabrechnen befassen, zu erfahren.

Die Schriftleitung.

Die Bedeutungen sind folgende:

jede Zeile	= eine einzige Koinzidenz
links vom /	= zuerst einstellen
rechts vom /	= später einstellen oder ablesen
A, B, C . . .	= zu benützende Skalen
a, b . . . ; 1, 2 . . .	= einzustellende oder abzulesende Werte
/	= Koinzidenz ohne Läufer- oder Zungenbewegung
∠	= Koinzidenz durch Läuferbewegung
7	= Koinzidenz durch Zungenbewegung
∠	= Koinzidenz durch Läufer- und dann Zungenbewegung
Ƶ	= geraffte Darstellung, ohne Ablesen von Zwischenwerten; zuerst linken Wert mit Läufer, dann rechten mit Zunge einstellen
$\overline{7}$	= Zunge „durchschieben“
q∠	= Einstellung mit der betreffenden Läufermarke
/kW	= Ablesung bei der betreffenden Läufermarke
$\underline{D}$	= Resultat auf der unterstrichenen Skala ablesen.

Einige Beispiele mögen das Gesagte noch etwas verdeutlichen:

(Um mit möglichst wenigen Zungeneinstellungen auszukommen, genügt bei den ersten vier Aufgaben der gewöhnliche Schul-Rietz, für Nr. 5 der Schul-Rietz N, während für Nr. 6 die Disponent-Stäbe praktischer sind — der Novo-Duplex erspart mit seiner CIF-Skala sogar noch eine Zungenbewegung mehr!)

1) 24 · 205 = **4920** D 24 7 C 1 / C 205 ∠ $\underline{D}$ 4920 oder D 24 Z CI 205 / C 10 / $\underline{D}$ 4920

2) 475 : 152 = **3,125** D 475 Z C 152 / C 1 / $\underline{D}$ 3,125 oder D 152 7 $\overline{C}$ 1 / D 475 ∠ $\underline{C}$ 3,125

3) 169; 3210; 9,45; 14,7 : 12,5 = **13,52; 256,8; 0,756; 1,176**
D 1 7 C 12,5
C 169; 3210; 9,45; 14,7 ∠ $\underline{D}$ 13,52; 256,8; 0,756; 1,176

4) 425 PS = **312,5 kW** D 425PS∠kW $\overline{D}$ 312,5

5) In einem schiefwinkligen Dreieck mißt a = 90 cm, c = 99 cm und der Winkel β = 53,13°. Wie groß ist die Seite b? **(85 cm)**

(Die Zeilen in Klammern sind nicht auf dem Stab zu rechnen!)

S 53,13 Z CI 90
C 1 / D 72 (= h)
T_2 53,13 $\overline{Z}$ CI 54 (= q)
(p = c — q = 99 — 54 = 45)
CI 45 ∠ T_2 58 (= β)
S 58 $\overline{Z}$ $\underline{CI}$ 85 (= b)
(γ = 180 — 53,13 — 58 = 68,87°)

6) Ein Kaufmann bezieht aus Frankreich verschiedene Sorten von Klebrollen. Er kennt die Preise der einzelnen Größen für je ein Gros (z. B. NF 16.—; NF 20.—; NF 25.— etc.) und erhält auf diese Preise 16% Rabatt. Nun will er die Rollen in Dänemark pro 100 Stück in Kronen anbieten bei den Kursen: NF 100.- = DM 73,50 und Kr. 100 = DM 67,50. Er muß 8% Teuerungszuschlag dazurechnen und möchte auf diesen Preis

35% gewinnen. Zu diesem Betrag kommen noch 4% Spesen, und zudem will er dem Käufer 30% Rabatt auf die Angebotspreise offerieren. Welche Listenpreise in Kronen ergeben sich dabei? (Umrechnungsfaktor = 1,376; Preise = **Kr. 22.—; Kr. 27.50; Kr. 34.40** etc.)

Es muß zuerst der Umrechnungsfaktor bestimmt werden, mit dem sich dann sämtliche Listenpreise in Tabellenform ergeben. Eine Darstellung jeder einzelnen Koinzidenz würde bei einem so umfangreichen Beispiel in den meisten Fällen zu weit führen, weshalb dann nur die geraffte Darstellung mit dem Zeichen Ƶ in Frage käme.

Hier sollen aber zur Illustration beide Schemata aufgeführt werden.

ausführliches Schema für
Schul-Disponent

DF —16% Z CF 144
CF 73,5 ∠ DF a
DF a 7 CF 67,5
CF +8% ∠ DF b
DF b 7 CF 1
CF +35% ∠ DF c
DF c 7 CF 1
CF +4% ∠ DF d
DF d 7 CF —30%
CF 1 ∠ DF 1,376
C 16; 20; 25 ∠ $\underline{D}$ 22.—; 27.50; 34.40

gerafftes Schema für **Disponent**

DF —16% Z CF 144
CF 73,5 Ƶ CF 67,5
CF +8% Ƶ CF —30%
CF +35% Ƶ CF 1
CF +4% Ƶ CF 1
C 16; 20; 25 ∠ $\underline{D}$ 22.—; 27.50; 34.40

Novo-Duplex

DF 84 Z CF 144
CF 73,5 Ƶ CF 67,5
CF 108 Ƶ CF 70
CF 135 Ƶ CIF 104
C 16; 20; 25 ∠ $\underline{D}$ 22.—; 27.50; 34.40

Die lineare Interpolation mit Hilfe des Rechenstabes

von Ing. Harald Bachmann

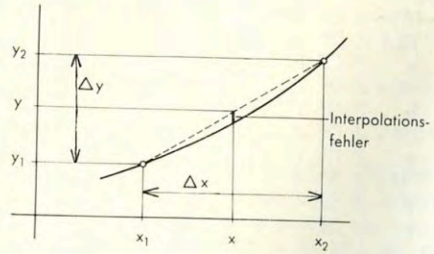
Die lineare Interpolation ist dann erlaubt, wenn der durch sie entstehende Fehler kleiner ist als der zugelassene Abrundungsfehler.

Da die für den praktischen Gebrauch erstellten Tafeln in der Regel so berechnet sind, daß innerhalb ihrer Rechengenauigkeit lineare Interpolation erlaubt ist, so stellt sie die meistangewandte Interpolationsmethode dar. Sie beruht auf der genügend genauen Proportionalität zwischen den Differenzen der Argumente und den Differenzen der Funktionswerte.

Für die Funktion $y = f(x)$ gilt gemäß nachstehender Abbildung:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

bzw. $y = y_1 + \frac{\triangle y}{\triangle x}(x - x_1)$



Zur Berechnung der Funktionswert-Zunahme $FZ = \frac{\triangle y}{\triangle x}(x - x_1)$

benutzt man folgendes Rechenschema:

C	$\triangle x$	$x - x_1$
D	$\triangle y$	FZ

oder symbolisch ausgedrückt: C $\triangle x$ / D $\triangle y$ // C $(x - x_1)$ / D <u>FZ</u>.

Der gesuchte Funktionswert ist dann: $y = y_1 + FZ$.

Beispiel 1:

	x	y = ln x		ln 420,25
	420	6,04025		
$\triangle x = 1$	421	6,04263	$\triangle y = 0{,}00238$	
	420,25	6,04025 + 0,00060 = 6,04085		

C 1 / D 238 // C 0,25 / D 59,5; $y = 6{,}04085$

Beispiel 2:

	x	y = cos x		cos 8⁰ 26′ 30″
	$8^0\,20'$	0,98944		
$\triangle x = 10'$	$8^0\,30'$	0,98902	$\triangle y = -0{,}00042$	
	$8^0\,26{,}5'$	0,98944 — 0,000273 = 0,989167		

C 10 / D 42 // C 6,5 / D 27,3; $y = 0{,}989167$.

Für die Umkehrung der Rechnung, wenn also das Argument gesucht wird, erhält man:

$$x = x_1 + \frac{\triangle x}{\triangle y}(y - y_1)$$

und damit die Zunahme des Arguments $AZ = \frac{\triangle x}{\triangle y}(y - y_1)$

nach dem Schema:

C	$\triangle y$	$y - y_1$
D	$\triangle x$	AZ

oder symbolisch ausgedrückt: C $\triangle y$ / D $\triangle x$ // C $(y - y_1)$ / D <u>AZ</u>.

Der gesuchte Argumentswert ist dann: $x = x_1 + AZ$.

Beispiel 3:

	y = ln x	x	
	6,04025	420	
$\triangle y = 0{,}00238$	6,04263	421	$\triangle x = 1$
	6,04085	420 + 0,25 = 420,25	

C 238 / D 1 // C 60 / D 0,252; $x = 420{,}25$

Beispiel 4:

	y = cos x	x	
	0,98902	$8^0\,30'$	
$\triangle y = 42$	0,98944	$8^0\,20'$	$\triangle x = -10'$
	0,989167	$8^0\,30' - 3{,}5' = 8^0\,26{,}5'$	

C 42 / D 10 // C 14,7 / D 3,5.

Will man innerhalb eines Bereiches mehrere Werte interpolieren, so benutzt man die Beziehung:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_1}{N} = \frac{y}{N + AZ} = \frac{y_2}{N + \triangle x}$$

die sich am Rechenstab sehr günstig einstellen läßt.

Besonders vorteilhaft sind hierbei für genauere Berechnungen die beiden W-Skalen des **Novo-Duplex** zu verwenden. Das angewandte Schema geht aus nachstehender Abbildung hervor:

C	$\triangle x$	N	N+AZ	N+$\triangle x$	W′
D	$\triangle y$	y_1	y	y_2	W

oder in symbolischer Darstellung: D $\triangle y$ / C $\triangle x$ // D y_1 / C N

D y / C <u>(N+AZ)</u>

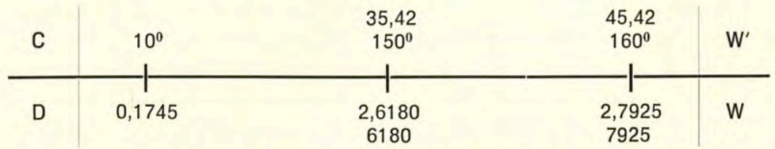
D y_2 / C <u>(N+$\triangle$x)</u>

Beispiel 5:

x	$y = \text{arc } x$
150^0	2,6180
160^0	2,7925

$\triangle x = 10^0$ $\qquad$ $\triangle y = 0{,}1745$

gesucht: 152^0; 154^0; 156^0; 158^0



Da die Stelle vor dem Komma keinen Einfluß auf die Differenz hat, kann man auch mit den Werten 6180 bzw. 7925 rechnen und erhält für N = 35,42 und für $N + \triangle x = 45{,}42$; die Einstellung:

C 1 / D 1745 // C 35,4 / D 6180 // C 45,4 / D 7925

ergibt also:

C 37,4 / D 6530; C 39,4 / D 6880; C 41,4 / D 7225; C 43,4 / D 7580

oder mit dem Novo-Duplex:

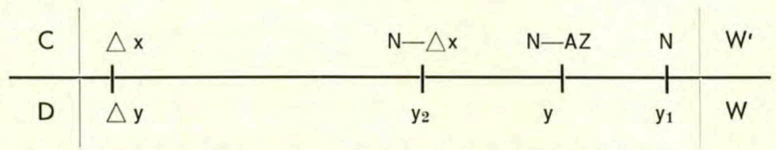
W_1' 1 / W_1 1745 // W_2' 35,42 / W_2 6180 // W_2' 45,42 / W_2 7925

W_2' 37,42 / W_2 6529; W_2' 39,42 / W_2 6878; W_2' 41,42 / W_2 7227; W_2' 43,42 / W_2 7576.

Die gesuchten Werte sind somit: 2,6529; 2,6878; 2,7227; 2,7576.

Beispiel 6:

Soll das Beispiel 2 auf diese Art berechnet werden, so ist folgende Einstellung zu berücksichtigen:



Nimmt man wiederum nur die letzten, unterschiedlichen Stellen (42; 2; 44), so erhält man:

C 10 / D 42 // C 0,477 / D 2 // C 10,477 / D 44

und mit 10,477 — 6,5 = 3,977

C 3,977 / D 16,7; das Ergebnis lautet somit 0,989167.

Eine Abhandlung über die quadratische Interpolation folgt in einem der nächsten Briefe.

Berechnung von $\sqrt{a^2 \pm b^2}$ mit dem „Novo-Duplex"

von Baurat Dipl.-Ing. Wagner

Durch Anbringung der C-Skala auf der Rückseite des Schiebers ist die rechnerische Behandlung des pythagoreischen Lehrsatzes auch mit dem **Novo-Duplex** ohne lästiges Wenden des Rechenstabes leicht möglich, wobei auf die erreichbare größere Genauigkeit besonders hingewiesen werden soll.

Unter Hinweis auf die Abhandlung des Herrn Ing. Huber im Rechenstabbrief 5 (1962), Seite 7, wird für die praktische Anwendung des Pythagoras am Rechenstab die Form

$$\sqrt{N^2 \pm n^2} = n \cdot \sqrt{\left(\frac{N}{n}\right)^2 \pm 1}$$

benutzt, wobei die Berechnung auf folgende Art durchgeführt wird:

W n / W' 1 (oder rote Marke)	1. Koinzidenz
W N / W' $\frac{N}{n}$; Cs = $\left(\frac{N}{n}\right)^2$	2. Koinzidenz
C (s ± 1) / $\underline{\text{W}}$	3. Koinzidenz

Die Koinzidenzschreibweise mag nicht jedermanns Sache sein; die beim NOVO-Duplex sehr einfache Einstellung und Ablesung kann man sich auch folgendermaßen merken: Es sei „n" stets die kleinere der beiden Zahlen unter der Wurzel. Dann wird von den Zungenskalen W' stets die „1" oder die rote Marke über (oder unter) „n" auf den Skalen W_1 oder W_2 des Stabkörpers eingestellt.

(Die Wahl „1" oder rote Marke ist leicht, da ja die andere Zahl „N" von den Zungenskalen noch erreicht werden muß).

Geht man nun mit dem Läuferstrich auf „N" (je nachdem auf W_1 oder W_2 des Stabkörpers) so steht auf „C" (Zunge) immer $\left(\frac{N}{n}\right)^2$, eine Zahl mit Sicherheit größer als „1,0".

Da es beim Rechenschieber-Rechnen ohne einen kleinen Überschlag im Kopfe nun mal nicht geht, muß die Größe von $\left(\frac{N}{n}\right)^2$ abgeschätzt werden, damit die Addition (bzw. Subtraktion) ± 1 richtig wird. Dieses Abschätzen ist leicht und nach einigen Beispielen geläufig. (Man beachte in diesem Zusammenhang Beispiel 4 und 5!)

Das Ergebnis der Wurzel steht nach (s ± 1) fast immer auf der Körperskala auf der N, also die größere der beiden Zahlen, eingestellt wurde. (Regel gilt nur begrenzt, bei $\left(\frac{N}{n}\right)^2 - 1$ und $\left(\frac{N}{n}\right)$ kleiner als 2 ist Vorsicht am Platze. Bei $\sqrt{n^2 + N^2}$ gilt es stets.)

Beispiel 1: $\sqrt{2{,}1^2 + 1{,}8^2} = 2{,}766$

1) W'_1 des Schiebers über 1,8 der Körperskala W_1

2) Läufer über 2,1 der Körperskala W_1 (Bruch $\frac{2{,}1}{1{,}8} = 1{,}166$ auf W'_1-Skala des Schiebers und $1{,}166^2 = 1{,}361$ auf der C-Skala des Schiebers)

3) Läufer auf 1,361 + 1 = 2,361 der C-Skala des Schiebers

4) Auf der W_1-Körperskala unter dem Läuferstrich das Ergebnis mit 2,766 ablesen, oder einfacher in der symbolischen Schreibweise:
W_1 1,8 / W_1' 1; W_1 2,1 / C 1,361; C 2,361 / $\underline{W_1}$ 2,766

Beispiel 2: $\sqrt{2{,}1^2 - 1{,}8^2} = 1{,}082$

W_1 1,8 / W_1 '1; W_1 2,1 / C 1,361; 1,361 — 1 = 0,361

(Schieber durchschieben, also rechte, rote Marke über W_1 1,8) C 0,361 / $\underline{W_1}$ 1,082. Bei der Einstellung s — 1 auf der C-Skala ist wie beim Wurzelziehen auf die Verwendung der richtigen Dekade zu achten und daher auf der entsprechenden Körperskala abzulesen.

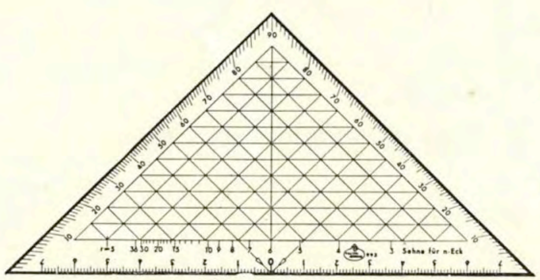
Beispiel 3: $\sqrt{4{,}5^2 \pm 1{,}8^2}$
W_1 1,8 / W_1' (rechte, rote Marke); W_2 4,5 / C 6,25; C 7,25 / $\underline{W_2}$ 4,848; C 5,25 / $\underline{W_2}$ 4,125

Beispiel 4: $\sqrt{7{,}2^2 \pm 1{,}8^2}$
W_1 1,8 / W_1' 1; W_2 7,2 / C 16; C 17 / $\underline{W_2}$ 7,42; C 15 / $\underline{W_2}$ 6,97

Beispiel 5: $\sqrt{18^2 \pm 7{,}2^2}$
W_1 7,2 / W_2' 10; W_2 18 / C 6,25; C 7,25 / $\underline{W_2}$ 19,38; C 5,25 / $\underline{W_2}$ 16,5

Beispiel 6: $\sqrt{7{,}2^2 \pm 4^2}$
W_2 4 / W_2' (linke, rote Marke); W_2 7,2 / C 3,24; C 4,24 / $\underline{W_2}$ 8,24; C 2,24 / $\underline{W_2}$ 5,985

Beispiel 7: $\sqrt{18^2 \pm 4{,}5^2}$
W_2 4,5 / W_2' (linke, rote Marke); W_1 18 / C 16; C 17 / $\underline{W_1}$ 18,55; C 15 / $\underline{W_1}$ 17,43



Kombi-Winkel 993

Ein Universalgerät für Volks-, Mittel- und Berufsschulen. In diesem durchsichtigen und maßbeständigen Zeichenwinkel sind Maßstab, Parallel-Lineal, Dreieck, Winkelmesser und Vieleckzeichner zweckmäßig verbunden.

Unter der Nr. **993 D** ist der Kombiwinkel auch als Wandtafelgerät verfügbar.

Einige Bemerkungen zur Didaktik des Unterrichts im Stabrechnen

von Dr. Ing. E. Rossow, Berlin

Bei der Einführung in das Rechenschieberrechnen können wir zwei Gruppen von Lernenden unterscheiden: Hörer ohne wesentliche mathematische Vorkenntnisse und Hörer, denen die Grundbegriffe elementarer Mathematik geläufig sind.

Bei der ersten Gruppe von Hörern, die insbesondere auch für kaufmännische Anwendungen in Frage kommt, wird die Einführung üblicherweise zugeschnitten auf graphische Addition und dann darauf Multiplikation und Division entweder über Logarithmen oder über Ersatzzahlen gelehrt. Für diese Gruppe hat für den Unterricht Hinweise gegeben Prof. S e i t z im Heft 2 (1961) Seite 10 des Rechenstab-Briefes. Der Nachteil einer derartigen Einführung ist der, daß für kompliziertere Rechenschieberanwendungen insbesondere mit Funktionsskalen die Anwendung der vierten Proportionale nicht geläufig wird.

Die zweite Gruppe von Hörern liegt beispielsweise im Unterricht an technischen Lehranstalten häufig vor, manchmal vielleicht auch im Schulunterricht der höheren Schulen. Als Mindestmaß vorhandener mathematischer Kenntnisse kann dort vorausgesetzt werden der Begriff der Funktion ebenso wie die Anwendung von Logarithmen. Sind diese Voraussetzungen gegeben, so soll man sich überlegen, ob die Einführung in das Rechenschieberrechnen nicht besser von Anfang an statt auf Addition und Subtraktion zweier Strecken, wie am Thermometerbeispiel des Bild 1 gezeigt, aufbaut auf dem geometrischen Vergleich der Differenz zweier Strecken, da sich dann auch kompliziertere Rechenschieberrechnungen mit mehreren Skalen zwanglos aus dem Einführungsbegriff ergeben.

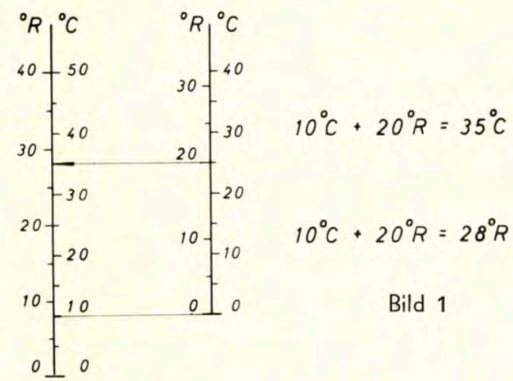


Bild 1

Linearer Vergleich von Differenzen

Man geht in diesem Falle aus von der einfachen geometrischen Vorstellung des Aneinanderlegens zweier Stäbe, die den Stabkörper und die Zunge repräsentieren (Bild 2). Bezeichnet man die Strecken auf dem einen Maßstab mit lateinischen, die auf dem anderen Maßstab mit griechischen Buchstaben und einem Querstrich zur Andeutung der Strecke, so ergibt sich zwanglos aus dem Bild, daß sein muß:

$$\overline{A} - \overline{\alpha} = \overline{B} - \overline{\beta} = \overline{C} - \overline{\gamma} = \dots$$

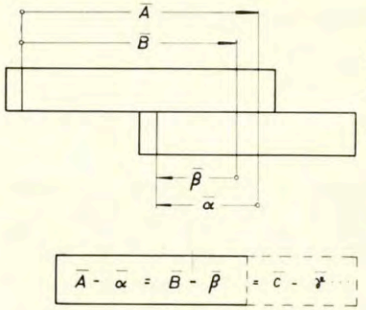


Bild 2

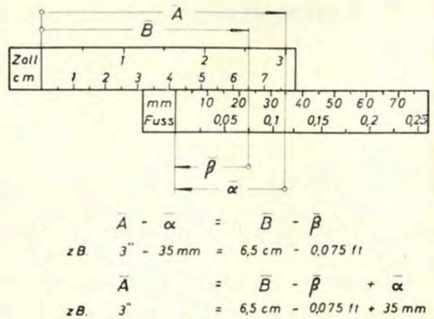


Bild 3

Bleibt man bei linearen Skalen (Bild 2), so kann man beispielsweise auf dem „Körper" eine Zoll- und eine cm-Skala (Zoll = ″) und auf der „Zunge" eine Meter- und eine Fuß-Skala anbringen. Die Übertragung liefert dann für das Beispiel des Bildes 2: 3″ — 35 mm = 6,5 cm — 0,075 ft, bei der mit dem kleinen Maßstab gegebenen Genauigkeit: hier kann schon die begrenzte Genauigkeit graphischer Ablesung klargemacht werden, im Beispiel würde bei korrekter Rechnung 76,2 mm = 65 — 22,86 + 35 mm = 77,14 mm im Rahmen des kleinen Maßstabes gleichgesetzt sein.

Jede der vier Größen obiger Gleichung kann nun als Unbekannte gewertet werden, z. B. wie im Bild $x = \overline{A}$ oder aber 6,5 cm — 0,075 ft + 35 mm = 3 Zoll abgelesen werden.

Vergleich der Differenzen von Funktionen

Den Übergang auf den Funktionsbegriff ganz allgemein und den logarithmischen Schieber im speziellen gibt das Bild 4. Den lateinischen Buchstaben auf dem Körper werden die großen griechischen Buchstaben als Funktionsoperator, den griechischen Buchstaben auf der Zunge die entsprechenden kleinen griechischen Buchstaben am Ende des griechischen Alphabetes zugeordnet und dann kann für die einzelnen Funktionsangaben der jeweilige Operator eingeführt werden. Im einfachsten Fall

$$\overline{A} - \overline{\alpha} = \overline{B} - \overline{\beta}$$

$$\Phi_{(a)} - \varphi_{(b)} = \Psi_{(c)} - \psi_{(d)}$$

für $\Phi = \varphi = \Psi = \psi = \log$

folgt: $\log a - \log b = \log c - \log d$

also $\log \frac{a}{b} = \log \frac{c}{d}$

d.h. Ablesung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Bild 4

$$\Phi = \varphi = \Psi = \psi = \log$$

wie auf dem Bilde dargestellt. Hieraus folgt zwanglos log a — log b = log c — log d also $\log \frac{a}{b} = \log \frac{c}{d}$ oder, bei der als bekannt vorausgesetzten Anwendung der Logarithmen, die direkte Ablesung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, wobei jeder dieser Buchstaben dem unbekannten x eines Dreisatzes zugeordnet werden kann.

Vierte Proportionale

Diese Darstellung der vierten Proportionale gibt damit die Ablesung des Dreisatzes in zwei Formen zur Berechnung einer Unbekannten y

$x = a$: $y = x = \frac{b \cdot c}{d}$ d. h. die übliche Dreisatzrechnung, oder aber mit

$x = b$: $y = \frac{1}{x} = \frac{c}{a \cdot d}$, eine Form, die für eine einzelne Einstellung beim Aufbau aus Addition und Multiplikation im allgemeinen nicht erarbeitet wird.

Die letzte Form leitet damit über zu der CI-Skala, um mit einer Ablesung beim Rechnen auszukommen: Beispiel

5 : 7 = 3 : x
D C = D (4,2 = x auf C) y = 0,238 auf CI.

Die Einführung des Funktionsbegriffs für den Vergleich der Differenz zweier Strecken gestattet nun zwanglos die entsprechenden Rechnungen für beliebige Verknüpfungen der Skalen technischer Rechenschieber durchzuführen. Als Beispiel, das auf praktisch allen Rechenschiebertypen gerechnet werden kann, sei gegeben

$\Phi : \psi : \frac{1}{2} \log$ (A-Skala bzw. B-Skala)
$\varphi : — \log$ (CI-Skala)
$\Psi : \log$ (D-Skala)

damit ergibt sich

$\frac{1}{2} \log a — (— \log b) = \log c — \frac{1}{2} \log d$

A	CI	D	B
oberer Körper	Mitte Zunge	unterer Körper	obere Zunge

Daraus ergeben sich als Rechnungen im allgemeinen Ansatz:

$\sqrt{a} : (\frac{1}{b}) = c : \sqrt{d}$ d. h.
$b \cdot \sqrt{a} = c / \sqrt{d}$ und daraus als beliebige Beispiele:
$x = a$: $\sqrt{a} = \frac{c}{b \sqrt{d}}$
$x = c$: $x = c = \sqrt{a} \cdot \sqrt{d} \cdot b = b \cdot \sqrt{ad}$ d. h.

eine Dreiermultiplikation mit einer Einstellung, eventuell mit Durchschlag der Zunge, als Beispiel

$x = 2 \sqrt{4{,}5 \cdot 19}$ d. h.
$\sqrt{4{,}5} : 2 = x : \sqrt{19}$
A CI D B
x = 18,5 (genauer 18,493)

und damit die direkte Ablesung von x = 18,5 auf der D-Skala mit eventuellem Weiterrechnen von dort aus bei komplizierteren Ausdrücken wie $x = f \cdot b \cdot \sqrt{ad}$ mit nur einer Zungenstellung und eventuellem Durchschlag.

Für die entsprechenden Rechnungen mit den trigonometrischen, den logarithmischen und den Exponential-Skalen ergeben sich für die einzelnen Rechenschiebertypen wie Rietz, Darmstadt, Duplex usw. unterschiedliche Einstellungen, da diese Skalen bald auf dem Grundkörper, bald auf der Zunge angebracht sind und in gewissen Bereichen auf einzelnen Schiebern auch durch andere Skalen mit Verschiebung ersetzt werden müssen, wie die trigonometrische Skala für den Sinus kleiner Winkel unter 6^0 durch Multiplikation mit ϱ auf der Grundskala.

Koinzidenzeinstellung

Nach der Rechnung auf den Grundskalen unter Verwendung der vierten Proportionale kann dann auf die Koinzidenz-Einstellung übergegangen werden, wie sie beispielsweise von Bachmann für die quadratische und kubische Gleichung in Heft 1 (1961) S. 17 und Heft 2 (1961) S. 14 des Rechenstab-Briefes an Beispielen der durch ein Additionsglied geänderten Koinzidenzeinstellung erklärt wurde. Die Koinzidenzeinstellung ergibt dann z. B. das Rechnen der Kuben- und der dritten Wurzel auch auf Schiebern ohne Kubusskala. Beispiel:

$x = a^3$ oder aufgelöst

$x : a = a : \left(\frac{1}{a}\right)$

D C D CI

bzw. DF CF D CI
bzw. D C DF CIF
bzw. DF C DF CI
bzw. D CF D CIF

Mit einem derartigen Beispiel kann die Vermeidung des sonst öfters erforderlichen Durchschlags mit Anwendung der gefalteten Skalen in verschiedenster Form gelehrt werden.

Die Koinzidenzeinstellung ergibt sich dann für die Umkehrung mit der dritten Wurzel

$x = \sqrt[3]{a}$ oder aufgelöst

$x^3 = a$ d. h. $x : 1 = a : x^2$

D C A B

Es ist also a auf der A-Skala einzustellen und die Zunge so zu verschieben, daß die 1 der C-Skala auf D auf die gleiche Zahl zeigt, wie die auf B unter a abgelesene Zahl. Die Richtung ergibt sich dann eindeutig aus der Stellenzahl von a, wie das folgende Zahlenbeispiel zeigt:

$\sqrt[3]{8}$ = einstellig a auf linker A-Skala Ablesung unter C 1

$\sqrt[3]{80}$ = zweistellig a auf rechter A-Skala Ablesung unter C 1

$\sqrt[3]{800}$ = dreistellig a auf linker A-Skala Ablesung unter C 10.

Zwanglos ergeben sich damit auch die komplizierteren Rechnungen wie

$y = \sqrt[3]{a^2}$ oder aufgelöst

$y^3 = a^2 = y \cdot y^2$ d. h.

$y : 1 = a^2 : y^2$

D C = D B

(A)

Es ist z. B. für $y = \sqrt[3]{4^2}$ der Wert a = 4 auf der D-Skala einzustellen und mit dem Läuferstrich auf der B-Skala und unter der 1 der C-Skala auf der D-Skala die Koinzidenz des Ergebnisses 2,52 auf D- und B-Skala herzustellen.

Da in diesem Falle der Schieber sofort in der Weiterrechnungsrichtung liegt, kann mit der C-Skala der Ausdruck

$y = b\sqrt[3]{a^2}$ bzw. mit der CI-Skala der Ausdruck

$y = \sqrt[3]{a^2/b}$ und mit der B-Skala der Ausdruck

$y = \sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

mit nur einer Schieberstellung sofort abgelesen werden, wobei lediglich gegebenenfalls ein Durchschlag erforderlich ist.

Zu der Einstellung der vierten Proportionale der verschiedenen Skalen gegeneinander und der Koinzidenzeinstellung sollte dann als letztes die unmittelbare Komplementärablesung, d. h. das Ergänzen der ersten Zahlen auf 9 bis zur letzten gültigen, auf 10 zu ergänzenden Zahl gelehrt werden und gleichzeitig auf die notwendige Umformung vieler Gleichungen für das Rechenschieberrechnen hingewiesen werden.

Als Beispiel sei die Brinellhärtenbestimmung auf Rechenschiebern mit der P-Skala $[\sqrt{1-(0{,}1\,x)^2}]$ und den gefalteten Skalen gegeben.

Eine **Brinellhärtenbestimmung** wird so ausgeführt, daß eine Kugel vom Durchmesser D unter einer Last P in den Werkstoff eingedrückt wird und der Eindruckdurchmesser d bestimmt wird. Die in Handbüchern zu findende Formel dafür lautet:

$$HB = \frac{2 \cdot P}{\pi\, D\, [D - \sqrt{D^2 - d^2}]}.$$

Sie entspricht der mathematischen Ableitung und ist für das numerische Rechnen denkbar ungeeignet. Eine einfache Umformung bringt

$$HB = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{P}{D^2} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2}}$$

In den Normen festgelegt ist für die einzelnen Werkstoffe ein bestimmtes Verhältnis $\frac{P}{D^2}$ z. B. für die Stahlprüfung $\frac{P}{D^2} = 30$.

Für die Normprüfung wird ein Kugeldurchmesser von D = 10 mm genommen. Die Brinellformel reduziert sich damit für einen gegebenen Wert von $\frac{P}{D^2}$ auf $HB = \frac{c}{1 - \sqrt{1 - y^2}}$ wobei $y = d/D$ ist.

Auf einem Schieber mit DF- und P-Skala ergibt sich damit die Brinellhärte bei Komplementärablesung ohne Zungenverstellung. Die Zunge wird gestellt mit 1 der C-Skala unter 60 der DF-Skala entsprechend dem Faktor $\frac{2 \cdot 30}{\pi} = 19{,}1$ auf der D-Skala, der nicht abgelesen zu werden braucht. Für einen Eindruckdurchmesser von beispielsweise 3,9 mm bei einer 10 mm-Kugel ist d/D = 0,39. 0,39 ist zugeordnet dem Wert 0,9208 auf der P-Skala; abgelesen wird aber das Komplement 0,0792. Dieser Wert wird auf die CI-Skala übertragen und unter der 792 der CI-Skala findet man auf der D-Skala die Härte von 241 kp/mm² als direkte Ablesung: die kompliziert aussehende Formel reduziert sich auf eine Läuferverschiebung bei feststehender Zunge.

Der Rechenstab in der analytischen Geometrie

von Dir. Dr. Josef Laub

Die Ermittlung der Koordinaten des Mittelpunktes und des Radius des Inkreises eines Dreiecks läßt sich sehr vorteilhaft mit Hilfe des Rechenstabes durchführen.

I. 1) Es sei in der Ebene ε ein rechtwinkliges Koordinatensystem gegeben. Eine Gerade g dieser Ebene teilt ε in zwei Gebiete G_1, G_2 (Fig. 1).

Ist $ax + by + c = 0$ die Gleichung von g, so kann man mit Hilfe der Funktion $f(x, y) = ax + by + c$ jedem Punkt $R(x_0/y_0)$ von ε den Wert $f(x_0, y_0 = ax_0 + by_0 + c$ zuordnen.

Ist $f(x_0, y_0) > 0$, und gehört R z. B. dem Bereich G_1 an, so ist j e d e m Punkt von G_1 ein p o s i t i v e r, jedem Punkt von G_2 ein negativer und jedem Punkt der Geraden g der Wert Null zugeordnet; somit gilt (Fig. 1): $f(x_1, y_1) > 0$, $f(x_2, y_2) < 0$, $f(x_3, y_3) = 0$.

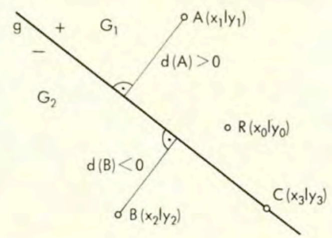


Fig. 1

2) Der absolute Betrag des Normalabstandes eines Punktes $D(x^*/y^*)$ von der Geraden g ist angegeben durch:

$$|d| = \left| \frac{ax^* + by^* + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$ wobei es gleichgültig ist, ob $c \neq 0$ oder $c = 0$ ist.

3) Wir ordnen dem Normalabstand d eines (nicht auf g liegenden) Punktes D von der Geraden g jenes Vorzeichen zu, das dem Punkt D auf Grund seiner Lage in ε zukommt; es ist daher (Fig. 1) $d(A) > 0$, $d(B) < 0$..

II. Geg.: Dreieck ABC
[A (—10,5/4,5), B (7/—3), C (0/16)]
Es sind die Koordinaten des Inkreismittelpunktes, und es ist der Radius des Inkreises mit Hilfe des Rechenstabes zu berechnen! (Fig. 2)

1) g_1: $19x + 7y - 112 = 0$

$$n_1: \quad \frac{19x + 7y - 112}{\sqrt{410}} = 0$$

g_2: $11{,}5x - 10{,}5y + 168 = 0$

$$n_2: \quad \frac{11{,}5x - 10{,}5y + 168}{\sqrt{242{,}5}} = 0$$

g_3: $3x + 7y = 0$

$$n_3: \quad \frac{3x + 7y}{\sqrt{58}} = 0$$

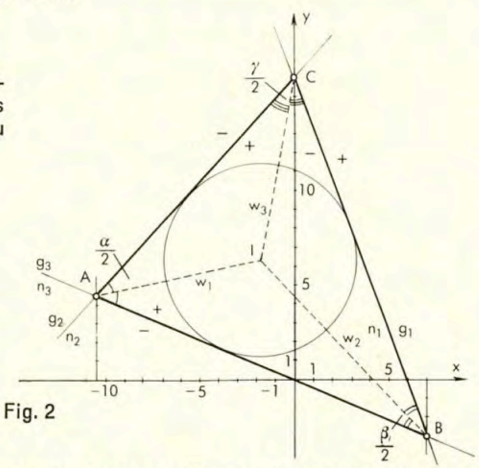


Fig. 2

2) Um den numerischen Wert von $\frac{d}{\sqrt{a}}$ zu ermitteln, stellt man den Mittelstrich des Läufers über d auf der Skala A ein; der Mittelstrich gibt auf der Skala D den Wert $\sqrt{d}$ an. Zur Ausführung der Division $a : \sqrt{d}$ wird die Skala C verwendet (Fig. 3a, b).

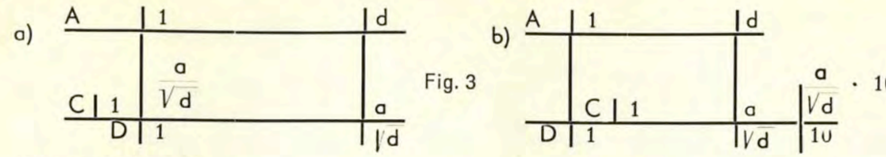


Fig. 3

Daraus ergibt sich:

n_1: $0{,}938x + 0{,}346y - 5{,}53 = 0$
n_2: $0{,}738x - 0{,}674y + 10{,}79 = 0$
n_3: $0{,}394x + 0{,}919y = 0$

3) a) Die Gerade g_1 teilt die Ebene ε in zwei Gebiete. Um festzustellen, in welchem dieser Gebiete einem Punkt von ε auf Grund der Funktion

$$(1) \quad n_1(x, y) = 0{,}938x + 0{,}346y - 5{,}53$$

positive Werte zugeordnet sind, setzt man z. B. die Koordinaten des Punktes E (0/10) in $n_1(x, y)$ ein; man stellt fest $3{,}46 - 5{,}53 < 0$. Somit sind den Punkten in jenem Gebiet, dem der Ursprung des Koordinatensystems angehört, negative Werte zugeordnet. Den Punkten, die in jenem Gebiet liegen, dem der Ursprung nicht angehört, sind positive Werte zugeordnet.

b) In analoger Weise führt man diese Untersuchung für jene Gebiete durch, die durch g_2 erzeugt werden und auch für jene durch, die durch g_3 erzeugt werden:

Setzt man die Koordinaten von E (0/10) in $n_2(x, y) = 0{,}738x - 0{,}674y + 10{,}79$ ein, so ergibt sich $-6{,}74 + 10{,}79 > 0$. Den Punkten in jenem Gebiet, dem der Ursprung angehört, sind positive Werte zugeordnet.

Das Einsetzen der Koordination von E (0/10) in $n_3(x, y) = 0{,}394x + 0{,}919y$ liefert $9{,}19 > 0$; d. h., allen Punkten, die mit E auf der gleichen Seite von g_3 liegen, sind positive Werte zugeordnet. In Fig. 2 wurden die beiden „Ufer" der Geraden g_1, g_2, g_3 mit dem festgestellten Vorzeichen versehen.

4) a) Liegt ein Punkt $U(x^*/y^*)$ auf der Geraden w_1, der Halbierenden des Winkels α des Dreiecks ABC, so ist dem Normalabstand des Punktes U von g_3 das Zeichen „+", dem Normalabstand des Punktes U von g_2 ebenfalls das Zeichen „+" zugeordnet. Für die Punkte der Winkelsymmetrale w_1 ist somit kennzeichnend, daß ihre Koordinaten die Beziehung erfüllen:

$n_2(x, y) = n_3(x, y)$. Daraus folgt:

w_1: $0{,}344x - 1{,}593y = -10{,}79$

b) Für die Punkte der Geraden w_2, der Symmetrale des Winkels β des Dreiecks ABC, gilt: $n_1 + n_3 = 0$.

w_2: $1{,}332x + 1{,}265y = 5{,}53$

c) Für die Punkte der Geraden w_3, der Symmetrale des Winkels γ des Dreiecks ABC, gilt: $n_1 + n_2 = 0$.

w_3: $1{,}676x - 0{,}328y = -5{,}26$

5) Zur Ermittlung der Koordinaten des Inkreismittelpunktes I läßt man zwei der drei Gleichungen w_1, w_2, w_3 koexistieren und verwendet etwa die Methode der gleichen Koeffizienten.

$$\begin{array}{rcl|c|c}
0{,}344\,x - 1{,}593\,y & = & -10{,}79 & 1{,}265 & -1{,}322 \\
1{,}322\,x + 1{,}265\,y & = & 5{,}53 & 1{,}593 & 0{,}344 \\
\hline
0{,}435\,x - \;.\;.\;. & = & -13{,}65 & & \\
2{,}123\,x + \;.\;.\;. & = & 8{,}81 & & \\
\hline
2{,}558\,y & = & -4{,}84 & & \\
\mathbf{x} & = & \mathbf{-1{,}89} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
.\;.\;. + 2{,}12\,y & = & 14{,}37 \\
.\;.\;. + 0{,}44\,y & = & 1{,}91 \\
\hline
2{,}56\,y & = & 16{,}28 \\
\mathbf{y} & = & \mathbf{6{,}36}
\end{array}$$

Somit ergibt sich für die Koordinaten des Inkreismittelpunktes

$$I\,(-1{,}89/6{,}36).$$

6) Zur Ermittlung des Inkreisradius ϱ berechnet man den absoluten Betrag des Normalabstandes des Inkreismittelpunktes I von den Geraden g_1, g_2, g_3.

a) Das Einsetzen der Koordinaten von I in die Funktion $n_3(x, y) = 0{,}394\,x + 0{,}919\,y$ ergibt

$$\varrho = |\,0{,}394 \cdot (-1{,}89) + 0{,}919 \cdot 6{,}36\,|$$
$$\varrho = |-0{,}744 + 5{,}85\,|$$
$$\varrho = \mathbf{5{,}1_1} \text{ (Längeneinheiten)}$$

b) Zur Kontrolle setzt man die Koordinaten des Punktes I z. B. in die Funktion

$$n_1(x, y) = 0{,}938\,x + 0{,}346\,y - 5{,}53$$

ein:
$$\varrho = |\,0{,}938 \cdot (-1{,}89) + 0{,}346 \cdot 6{,}36 - 5{,}53\,|$$
$$\varrho = |-1{,}77_2 + 2{,}20 - 5{,}53\,|$$
$$\varrho = \mathbf{5{,}1} \text{ (Längeneinheiten)}$$

III. 1) Aus 1), 2) und 3) des Abschnittes I ist zu entnehmen, daß man den Normalabstand eines Punktes von einer Geraden auch rechnerisch ermitteln kann, wenn die Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft.

2) Will man die beiden gestellten Aufgaben o h n e Rechenstab lösen, so ist es erforderlich, g e e i g n e t e Koordinaten für die Ecken des Dreiecks zu wählen. Sind nämlich die im Nenner von n_1, n_2, n_3 auftretenden Wurzelwerte nicht rational und wesentlich voneinander verschieden, so ist die damit verbundene Rechenarbeit zur Berechnung der Koordinaten des Inkreismittelpunktes zu langwierig. Bei Ausführung dieser Rechnungen m i t dem Rechenstab ist man von den erwähnten Einschränkungen vollkommen frei.

Rechenstab und programmierte Lehrbücher

von Gewerbeschulrat K. Best

Die Anforderungen, die Leben und Beruf an jeden einzelnen stellen, sind anspruchsvoller geworden. Die Berufsausübung setzt in zunehmendem Maße umfassendere geistige Fähigkeiten voraus, die eine Intensivierung der theoretischen Ausbildung bedingen.

Technisierung und Rationalisierung steigern den Lebensrhythmus zu einem Tempo, mit dem nur der wendige Mensch bei sinnvollem Einsatz moderner Hilfsmittel Schritt halten kann. Der Ruf nach Lehr- und Lernmaschinen ist ein sichtbares Zeichen dafür, daß der Mensch befürchten muß, mit konventionellen Mitteln die Probleme der Lebens- und Berufswelt nicht meistern zu können. Doch sollte er sich nicht einer Panikstimmung hingeben, sondern sorgfältig prüfen, ob er es bisher nicht versäumte, die ihm zur Verfügung stehenden Mittel in ausreichendem Maße zu nutzen. Der Gebrauch der Formel- und Tabellenbücher, der Einsatz mechanischer Hilfsmittel bei Unterricht und Ausbildung ist nichts Neues. Abgesehen von Lehrfilm, Schulfunk und ähnlichen Unterrichtshilfen **ist der Rechenstab ein beliebtes Hilfsmittel** im Mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht und ein unentbehrliches Handwerkszeug des Ingenieurs und des Kaufmanns. Wenn auch in zunehmendem Maße der Rechenautomat von Hand oder elektrisch betrieben in den kaufmännischen und technischen Büros sowie in den Behörden Eingang findet, **so bleibt doch der Rechenstab das preiswerte, überall einsatzfähige und leicht zu handhabende Hilfsmittel des „Normalverbrauchers".**

Obwohl der Rechenstab seine Bewährungsprobe bestanden hat, dürfte eine Überprüfung seiner Anwendung als Rechenhilfsmittel im Hinblick auf die Erörterung der Probleme des Programmierens und der mechanischen Lehr- und Lernhilfen gerechtfertigt erscheinen. Wie sich schon jetzt übersehen läßt, beschränkt sich das sogenannte „Programmieren" auf die Aneignung von Techniken und Fertigkeiten. Somit läßt sich auch die Handhabung des Rechenstabes programmieren, d. h. Lernbücher über den Gebrauch des Rechenstabes sind zu entwickeln, die den Schüler befähigen, in kleinen Teilschritten im Rahmen seines individuellen Auffassungsvermögen durch aktive Betätigung die vielseitige Verwendung des Rechenstabes im Unterricht und in der Berufspraxis zu erfassen und zu üben.

Die vorliegenden, z. T. sehr gut durchgearbeiteten Lehrbücher über den Gebrauch des Rechenstabes können mit Fug und Recht den Anspruch auf Vollständigkeit erheben, wirken aber durch den vornehmlich beschreibenden Text eher verwirrend als klärend. In dem Bemühen, die Konstruktion des Rechenstabes, z. B. die ungewohnte Teilung, die unterschiedlichen Skalen, verständlich zu machen und die Besonderheiten der einzelnen Rechenoperationen einander gegenüberzustellen, ohne allzu ausführlich zu werden, erschwert dem Anfänger das Verständnis und läßt dann das Interesse am Gebrauch des Rechenstabes erlahmen.

Der Vorzug eines programmierten Lehrbuches besteht darin, daß der Schüler systematisch von Denkstufe zu Denkstufe geführt wird, entsprechend reagiert und die Richtigkeit des Ergebnisses sofort nachprüfen kann. Die hierdurch gewonnene Sicherheit spornt ihn zu steigender Leistung an, wobei er das Lerntempo selbst bestimmt.